تطبيقات في التكاملات الثلاثية

د. منير الترك

رياضيات 3

التجزئة الكروية:

نستخدم التجزئة الكروية عندما نجري المكاملة على منطقة فراغية ذات تناظر مركزي أو جزء من تناظر مركزي وغالبا ماتكون المنطقة المحاطة بسطوح معادلتها كروية سهلة عندئذ نأخذ التبديل التالي:

$$x = rCOS(\varphi)Sin(\theta)$$
$$y = rSin(\theta)Sin(\varphi)$$
$$z = rCOS(\theta)$$

ونعوض بهم ونجري التحويل التالي:

$$d(x)d(y)d(z) \Longrightarrow r^2 Sin(\theta)d(r)d(\theta)d(\varphi)$$

1) اذا كانت الكرة مركزية فإن:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq r \leq r$$

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} Sin(\theta)d(\theta) \int_0^{r} r^2 f(r,\theta,\varphi)\, d(r)$$

2) إذا كانت الكرة على oy وكانت المتراجحة من الشكل:

$$x^2+y^2+z^2 \le y$$

$$0 \le \varphi \le \pi$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

r تحسب من المعادلة

3) إذا كانت الكرة علىoz وكانت المتراجحة من الشكل:

$$x^2+y^2+z^2 \le z$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le r \le \ rCOS(\theta)$$

وعندها نكامل مباشرة دون الرجوع إلى التكامل الثنائي و يكون التكامل بالعكس أي طريقة المكاملة حسب الأرقام:

$$I=\int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} Sin(\theta)d(\theta) \int_0^{r} r^2 f(r,\theta,\varphi)\ d(r)$$

(3) (2) (1)

قوانين للحفظ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$x^2+y^2=r^2 Sin^2(\theta)$$

مثال(1):

$$I=\iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} d(x)d(y)d(z)$$

$$V \equiv (x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \le 1$$

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} \text{Sin}(\theta) d(\theta) \int_{r=0}^{r=1} (e^{r^2})^{\frac{3}{2}}\ r^2 d(r)$$

$$I = \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right) \int_0^{2\pi} d(\varphi)[1+1] = \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right) 2\pi = \frac{4}{3}\pi\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

ملاحظة:

في حال لم يكن هنالك تابع مكامل أي ان $f(x, y, z) = 1$ يجب ان يكون جواب التكامل هو قانون حجم الكرة و في حال كانت الكرة واحدية يجب أن يكون الجواب هو $\frac{4}{3}\pi$ لنتحقق من ذلك:

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} \text{Sin}(\theta) d(\theta) \int_{r=0}^{r=1} r^2 d(r)$$

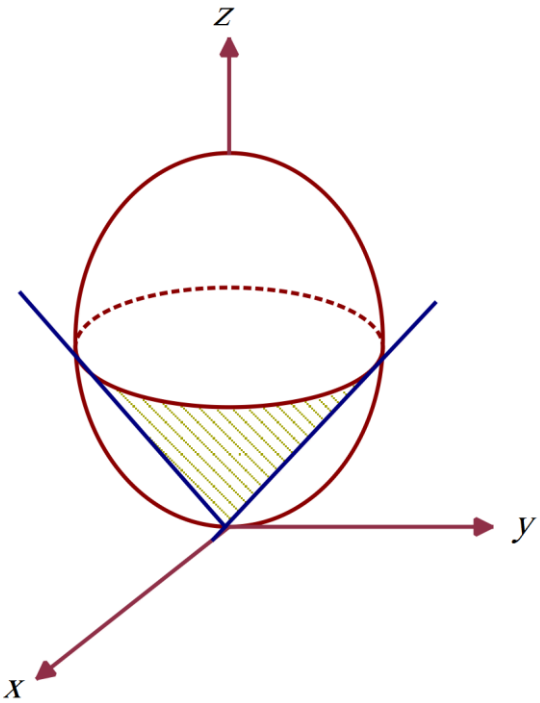
$$I = 2\pi \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}$$ **و هو المطلوب**

مثال(2):

أوجد حجم المطقة الواقعة داخل المجسم: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

وداخل المجسم $x^2 + y^2 + z^2 = z$

الحل:



لدينا $z^2 = x^2 + y^2$ و نعلم أن المعادلة العامة للمخروط هي من الشكل:

: $z^2 tg^2(\theta) = x^2 + y^2$ بالمطابقة بين المعادلتين نجد:أن

$$tg^2(\theta) = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

و نعلم بأن الخروط له جزين وحسب منطقة التكامل المعطاة نجد أنه يتوجب علينا أخذ الجزء العلوي من المخروط

نتمم معادلة الكرة إلى مربع كامل فيكون:

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

وهي معادلة كرة مركزها $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$

والان لنوجد حدود ال r :من معادلة الكرة نجد $r^2 = z = r\text{COS}(\theta) \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \text{COS}(\theta) \end{cases}$

أما حدود الθ نأخذها من الرسم

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}(\theta)d(\theta) \int_{r=0}^{r=\text{COS}(\theta)} r^2 d(r)$$

$$I = 2\pi \times \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}(\theta)\text{COS}^3(\theta)d(\theta)$$

$$I = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\text{COS}^4(\theta)}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(-0 + \frac{1}{4\left(\sqrt{2}\right)^4}\right) = \frac{\pi}{6}\frac{1}{4} = \frac{\pi}{24}$$

سؤال دورة 2005 ميكانيك عام :

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)d(x)d(y)$$

$$V \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z & \text{داخل الدائرة} \\ x^2 + y^2 = 3z^2 & \text{داخل المخروط} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2 & \text{خارج المخروط} \end{cases}$$

أولا لنوجد زاوية المخروطين مع المحو OX

اذا بالنسبة للمخروط الذي معادلته $z^2tg^2(\theta) = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 3z^2$ **يكون:** $tg^2(\theta) = 3 \Longrightarrow tg(\theta) = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

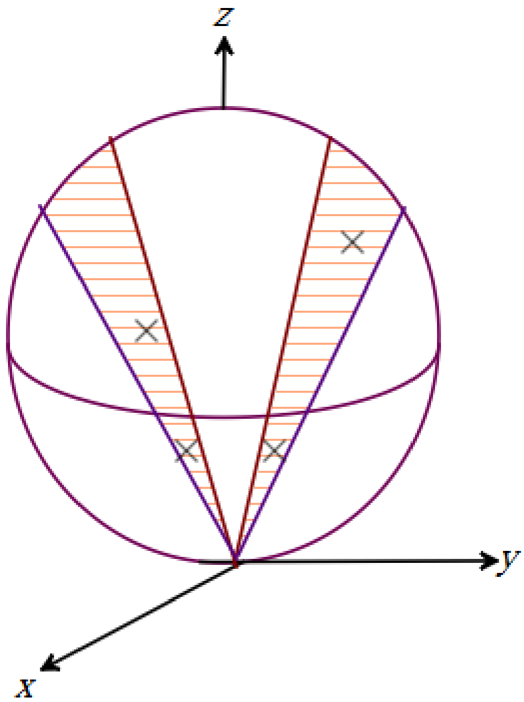
أما بالنسبة للمخروط الذي معادلته: $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ **يكون** $tg^2(\theta) = \frac{1}{3} \Longrightarrow tg(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

لنوجد حدود ال r من معادلة الدائرة : $r^2 = 2z = 2rCOS(\theta) \Longrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2COS(\theta) \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} Sin(\theta)d(\theta) \int_{r=0}^{r=2COS(\theta)} r^2Sin^2(\theta)\, r^2d(r)$$

$$I = \int_0^{2\pi} d(\varphi) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} Sin^3(\theta)d(\theta) \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2COS(\theta)}$$



$$I = 2\pi \times \frac{32}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} Sin^3(\theta)COS^5(\theta)d(\theta)$$

$$I = \frac{64\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} Sin(\theta)(1 - COS^2(\theta))COS^5(\theta)d(\theta)$$

$$I = \frac{64\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \big(Sin(\theta)COS^5(\theta) - COS^7Sin(\theta)\big)d(\theta)$$

$$I=\frac{64\pi}{5}\left[-\frac{COS^6(\theta)}{6}+\frac{COS^8(\theta)}{8}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I=\frac{64\pi}{5}\left[-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{1}{6}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6-\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8\right]$$

ونكمل الحل ....

سؤال دورة هام جدا:

$$I=\iiint_V\frac{d(x)d(y)d(z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V\equiv x^2+y^2+z^2\leq y$$

وذلك بعد التأكد من صقالته .

الحل:

نلاحظ أن هذا التكامل شاذ لأن O(0,0,0) تجعل من التابع المكامل غير موجود لذلك نحيط بهذة النقطة كرة صغيرة نصف قطرها δ_N ونجعل :

$$x^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2=\frac{1}{4}$$

$$0\leq\varphi\leq\pi$$

$$0\leq\theta\leq\pi$$

$$r^2=y=r\mathrm{Sin}(\theta)\mathrm{Sin}(\varphi)\begin{cases}r=\mathrm{Sin}(\theta)\mathrm{Sin}(\varphi)\\ r=\delta_N\end{cases}$$

$$I=\lim_{\delta_N\to0}\int_0^{\pi}d(\varphi)\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}(\theta)d(\theta)\int_{r=\delta_N}^{r=\mathrm{Sin}(\theta)\mathrm{Sin}(\varphi)}\frac{r^2}{(r^2)^{\frac{1}{2}}}d(r)$$

$$I=\lim_{\delta_N\to0}\int_0^{\pi}d(\varphi)\int_0^{\pi}\mathrm{Sin}(\theta)d(\theta)\int_{r=\delta_N}^{r=\mathrm{Sin}(\theta)\mathrm{Sin}(\varphi)}rd(r)$$

$$I = \lim_{\delta_N \to 0} \int_0^{\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} \text{Sin}(\theta) d(\theta) \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\delta_N}^{\text{Sin}(\theta)\text{Sin}(\varphi)}$$

$$I = \frac{1}{2} \lim_{\delta_N \to 0} \int_0^{\pi} d(\varphi) \int_0^{\pi} \text{Sin}(\theta) d(\theta) [\text{Sin}^2(\theta)\text{Sin}^2(\varphi) - \delta_N^2]$$

$$I \approx \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \text{Sin}^2(\varphi) d(\varphi) \int_0^{\pi} \text{Sin}^3(\theta) d(\theta)$$

حسب قانون والس نجد:

$$\int_0^{\pi} \text{Sin}^3(\theta) d(\theta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^3(\theta) d(\theta) = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \text{Sin}^2(\varphi) d(\varphi) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^2(\varphi) d(\varphi) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right)$$

$I \approx \frac{\pi}{3}$ **فالتكامل متقارب**

وظيفة :

$$I = \iiint_V \frac{d(x)d(y)d(z)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$$

حيث أن V في الثمن الأول الموجب في الفراغ **الجواب** $\frac{\pi^2}{8}$

$$I = \iiint_V xy\sqrt{z} d(x)d(y)d(z)$$

$$V \equiv \begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \\ z = 0 \\ z = y \end{cases}$$